KALKULUS

Matematické modelovanie

MARTIN TIMOTHY TIMKO

1.3. 2015 – 4.3. 2015

1 DIFERENCIÁLNY POČET

Diferenciálny počet a jeho proces derivácie ma fascinoval už od strednej školy. Princíp som poznal už na základnej škole, avšak aj na strednej škole a neskôr mi podstata ostala viac-menej utajená. Pritom použitie bolo pomerne jednoduché. Určitú sadu vzorcov sme aplikovali na nejaké funkcie, v ktorých sme očakávali určité výstupy. Avšak čo sa dialo na pozadí tohto procesu bolo určitým spôsobom záhadné a jedinečné.

Isaac Newton ako "objaviteľ" kalkulu (diferenciálneho a integrálneho počtu), ak sa to tak dá nazvať, trpel chorobným strachom z kritiky. Takýto strach často sprevádzajú úzkosti a pocity menejcennosti. Aj preto väčšinu svojich prác nepublikoval, vrátane kalkulu. Až astronóm *Edmund Halley* ho presvedčil, aby pripravil k vydaniu niektoré časti o zákonoch pohybu a gravitácie. Jeho dielo **Matematické základy prírodovedy** navždy zmenili pohľad na prírodné vedy. *Gottfried Wilhelm Leibniz* objavil a vydal kalkulus o niečo málo neskôr ako Newton, čo mu mnohí vytýkali, že to od neho prebral. Newton mu niektoré zápisky poslal dobrovoľne, na jeho požiadanie. Newtonové pojatie kalkulu sa odlišovalo od Leibnizovho hlavne zápisom. Newtonová verzia nebola dobre zrozumiteľná, Leibniz používal geometrický princíp, jeho metóda bola prirodzenejšia. Takže Newtonová symbolika sa používa dodnes skôr vo fyzike a Leibnizova v matematike (aj keď sa prelínajú samozrejme). Dnes považujeme obidvoch za otcov kalkulu. Ale treba podotknúť, že samotné zárodky kalkulu, jeho metódy, a vôbec myšlienka ako taká už bola známa niektorím vedcom už dávnejšie. Bolo to niečo podobné ako s *Einsteinovou teóriou relativity*. Tieto teórie nevznikali zo dňa na deň, boli výsledkom mnohých vedcov po mnohé stáročia.

Diferenciálnym počtom už ako z názvu vyplýva je možné počítať nejaké diferencie, zmeny. Teda diferenciálnym počtom je možné analyzovať zmeny objektu, jeho pohyb. Ale medzi pohybom a zmenou musí existovať vzťah. A tento vzťah hľadáme práve diferenciálnym počtom. Čiže snažíme sa nájsť mieru zmeny nejakej meniacej sa veličiny, objektu. A práve na to slúži **derivovanie**. Smer pohybu daného objektu musí byť popísaný vzorcom. Derivovaním tohto vzorca sa vytvorí **nový vzorec**, ktorý už udáva **hľadanú mieru zmeny**.

Typickým príkladom je klasický príklad z fyziky, kde máme auto idúce po ceste. Premenná s bude označovať dráhu auta, ktorá sa mení v závislosti na čase t podľa vzorca:

$$s = 5t^2 + 3t \tag{1}$$

Podľa diferenciálneho počtu je rýchlosť auta v, čiže miera zmeny polohy, v ľubovoľnom čase t daná vzorcom:

$$v = 10t + 3 \tag{2}$$

Výraz $10t + 3$ vznikol derivovaním výrazu $5t^2 + 3t$. Rýchlosť auta nie je konštantná a mení sa s časom, tak ako aj dráha. Ak aplikujeme proces derivovania ešte raz získame zrýchlenie $a = 10$, ktoré je konštantné.

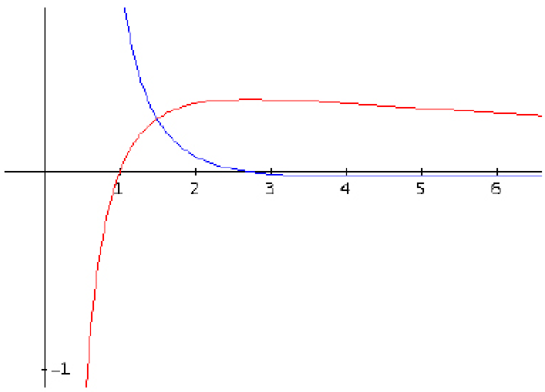
Základom všetkého je funkcia. Bez funkcie by neexistovala derivácia. Funkcia je predpis podľa ktorého je ku každému číslu z danej množiny priradené iné číslo, *tzv. funkčná hodnota*. Takáto funkcia je zobraziteľná v euklidovskom priestore, čo je pri derivácii výhodné z hľadiska pochopenia. Derivácie ako také je možné použiť aj v iných odvetviach vedy, často vo fyzike, geometrii a technických disciplínach. Derivácia je dobrá v tom (okrem iného), že nám dokáže povedať niečo o priebehu pôvodnej funkcie. Takže napr. máme funkciu *(na obrázku nižšie znázornená červenou farbou)*:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \tag{3}$$

Táto môže predstavovať čokoľvek, od rastu cien HDP až po priebeh teploty. Máme potom druhú funkciu, jej deriváciu v tvare *(na obrázku znázornená modrou farbou)*:

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \tag{4}$$

Pôvodná (nederivovaná) funkcia f je rastúca, keď jej derivácia nadobúda kladné hodnoty a klesajúca, keď derivácia nadobúda záporné hodnoty. Bod, v ktorom má funkcia f **maximum** je v bode, kde je hodnota derivácie **nulová**. Teda z derivácie je možné vyčítať niektoré informácie o **priebehu** pôvodnej funkcie.



Takúto deriváciu je možné naprogramovať. Ale ešte predtým ju treba zadefinovať. Teda, nech funkcia $f(x)$ je definovaná v okolí bodu a. Potom môžme napísať niečo také:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5}$$

Túto limitu nazveme **deriváciou funkcie** $f(x)$ v bode a, čo sa označuje $f'(a)$.

Príklad: Máme vypočítať deriváciu funkcie v bode a.

$$f(x) = x^3 \tag{6}$$

Výsledkom tejto derivácie bude hodnota, číslo, v bode a. Toto číslo dostaneme tak, že spočítame limitu pre x idúce do a. Prečo počítame toto a prečo takto sa dozvieme neskôr. Zatiaľ vypočítame príklad podľa vzťahov. Takže dostaneme niečo také:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \to a} x^2 - ax + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \tag{7}$$

Čiže, ak zderivujeme funkciu $f(x) = x^3$ dostaneme $f'(x) = 3x^2$. V našom prípade v bode a a dosadením ľubovoľného čísla v tomto bode dostaneme hodnotu **zderivovanej** funkcie $f(x)$.

Program vyzerá nasledovne. Bol použitý programovací jazyk C s hlavičkovými súbormi:

```
#include <stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include <math.h>
```

Zadefinujeme si funkciu `f` s jedným vstupným parametrom typu `float`, ktorý vráti hodnotu funkcie typu `float` v tomto bode:

```
float f(float x)
{
    return x*x*x;
}
```

A teraz si definujeme funkciu, ktorá bude počítať, aproximovať, funkciu v bode `a`:

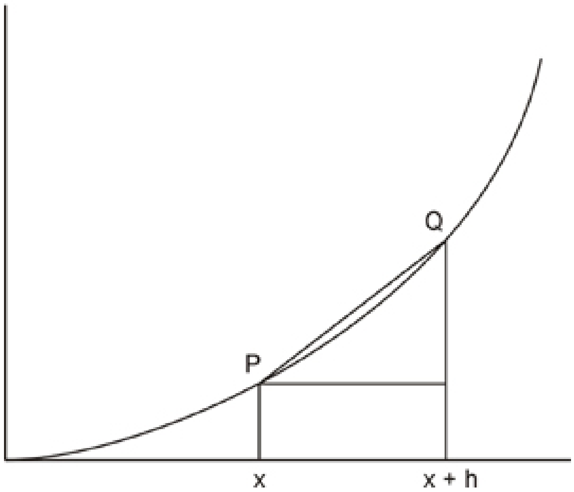
```
float PrvaDerivacia(float bod)
{
    float xt = bod;
    float h = 0.01 * (1 +  abs(xt));
    bod = xt + h;
    float fp = f(bod);
    bod = xt - h;
    float fm = f(bod);
    bod = xt;
    return (fp - fm)/2/h;
}
```

A ešte hlavnú funkciu `main`, ktorá len zavolá funkciu `prvaDerivacia` a vypíše výsledok na obrazovku:

```
void main(void)
{
    printf("%f", PrvaDerivacia(2));
    system("pause");
}
```

Ak program preložíme a spustíme, vypíše hodnotu `12.000895`, čo je približne `12`. A naozaj. Funkcia x^3 v bode `2` je `8` a jej derivácia $3x^2$ v bode `2` je `12`. Teda naozaj nami naprogramovaná funkcia derivuje.

Newton a Leibniz mali za úlohu vyriešiť ako stanoviť "rýchlosť" zmeny funkcie, teda pomer zmeny $y = f(x)$ k zmene x. V grafickom znázornení, na obrázku nižšie, to znamená, nájsť v danom bode x sklon krivky, ktorý je daný veľkosťou uhlu medzi dotyčnicou ku krivke v danom bode (P, Q) a osou x. V číselnom vyjadrení sa veľkosť uhlu vyjadruje ako smernica dotyčnice k danej krivke alebo aj tangens uhla. Táto veľkosť smernice nie je konštantná, závisí od charakteru krivky. Smernica dotyčnice ku krivke závisí od hodnoty x a táto hodnota závisí od y. Čiže **hodnoty smerníc definujú našu krivku**.



Budeme uvažovať kvôli jednoduchosti funkciu $y = x^2$ znázornenú na obrázku vyššie. Na konci uvažovania získame všeobecný predpis pre funkciu $y = x$.

Ako je možné vidieť na obrázku, s rastúcou hodnotou `x` rastie nie len hodnota funkcie `y`, ale aj smernica, teda uhol. Nebudeme počítať priamo uhol, ale len pomer sklonu medzi bodmi `P` a `Q`, teda smernicu úsečky spájajúcu bod `P` a `Q`. Výsledkom bude len **pomerné číslo**. Takže pri danej hodnote `x` je výška krivky daná výrazom x^2. Ako spočítame smernicu pre danú hodnotu `x` ? Čiže ako spočítame v trojuholníku na obrázku uhol medzi osou `x` a úsečkou `PQ` ? Myšlienka bola nasledujúca. Pozrieme sa na bod `Q`, ktorého súradnica je $x + h$. Výška bodu `P` je x^2 a výška bodu `Q` je $(x + h)^2$. Od bodu `P` do bodu `Q` sa krivka ohýba smerom hore. Nemôžeme počítať smernicu v takomto rozpoložení, pretože body `P` a `Q` sú od seba priveľmi vzdialené. Sú od seba vzdialené natoľko, že úsečka `PQ` nesplýva s krivkou (je medzi nimi medzera). Musíme teda úsečku `PQ` zmenšiť na menšie úsečky, aby tzv. **(lepšie) aproximovala danú krivku**. Vtip spočíva v tom, že pri veľmi malých hodnotách hodnoty `h` bude platiť, že v bode `P` sa smernica bude blížiť smernici tejto úsečky. Čiže stačí nám spočítať smernicu v bode `P`, teda prírastok výšky, toho trojuholníka, vydelíme prírastkom vo vodorovnom smere. Prírastok výšky je daný výrazom:

$$(x + h)^2 - x^2 \tag{8}$$

Tento prírastok označíme ako `dy` (dy = funkčná hodnota v bode Q - funkčná hodnota v bode P). Takto ho označil aj Leibniz, ovšem Newton bol viac fyzik než matematik a označil ho ako `dr`, podľa vzorca $r = t^2$. To preto, pretože Newton používal fyzikálny model podľa ktorého označil `r` ako vzdialenosť polomeru a `t` ako čas. Leibnizov model sa používa častejšie, najmä v matematike. Newtonové označenie sa používa z veľkej časti vo fyzike.

Prírastok vo vodorovnom smere je `h`, pretože rozdiel $x + h - x = h$. Tento prírastok si označíme ako `dx`.

Takže smernica úsečky spájajúca bod `P` a `Q` je daná pomerom `dy` ku `dx`, z čoho dostaneme:

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \tag{9}$$

Čitateľ upravíme na tvar:

$$(x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 \tag{10}$$

Po úprave dostaneme:

$$\frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \tag{11}$$

Tento výraz udáva smernicu úsečky `PQ`. Ale nespočítali sme smernicu krivky v bode `P`! Teraz sme v podstate len zderivovali funkciu $y = x^2$, čoho výsledkom je funkcia $y = 2x$. Ovšem nie $2x$, ale $2x + h$. Newton a Leibniz považovali túto hodnotu $h = 0$, čo nebolo celkom správne. Ak sa pozrieme na obrázok tak so zmenšujúcou sa hodnotou `h` sa bod `Q` približuje k bodu `P`. Pre každý prírastok `h` odpovedá výraz $2x + h$, tzn. že pre akýkoľvek najmenší prírastok `h` platí smernica úsečky `PQ`, ktorú sme spočítali. Takže, ak zvolíme za $x = 5$ a budeme postupne zmenšovať krok `h` z `0.1` na `0.01` až `0.000001` atď, tak dostaneme postupne hodnoty, `10.1`, `10.01`, až `10.000001` atď. A tu je jasne vidieť, že so zmenšujúcim sa krokom `h` sa smernica blíži k **celej hodnote** čísla, v našom prípade hodnote `10`. Teda počítame vlastne limitu od `x` idúcu k `0`. V reálnej praxi by to znamenalo dosadiť $h = 0$. Newton a Leibniz uvažovali priamo $h = 0$, čo z matematického hľadiska nebolo správne, pretože ak dosadíme do poslednej rovnice $h = 0$ tak výraz na ľavej strane nebude definovaný, pretože podiel `0/0` v matematike nie je definovaný. Preto bolo potrebné uvažovať **limitné prípady**. To znamená, že z geometrického hľadiska sa so zmenšujúcim sa `h` bod `Q` približuje bodu `P` a rozdiel medzi smernicou úsečky `PQ` a smernicou krivky v bode `P` postupne mizne, čo znamená, že limitná hodnota smernice úsečky `PQ` bude presnou hodnotou smernice krivky v bode `P`! Čiže smernica krivky pre hodnotu x je daná výrazom $2x$, čo je limitná hodnota výrazu $2x + h$ pre h blížiace sa k nule.

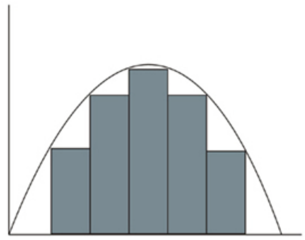
Tento nedostatok neskôr odstránil Karl Weierstrass zavedením pojmu limity.

2 INTEGRÁLNY POČET

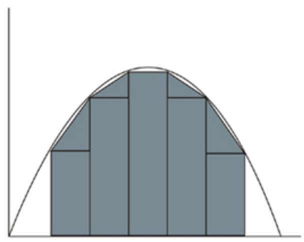
Výpočet plôch a objemov je obrátenou operáciou k derivovaniu, čiže k procesu hľadania smerníc. Znie to divne, až nepredstaviteľne, ale je to tak. To je na celkom kalkule asi najzaujímavejšie, ale samozrejme nie určujúce.

Na zistenie plochy nejakého obdĺžnika alebo objemu kvádra nám postačí obyčajné násobenie rozmerov dĺžky, šírky a výšky. Problém nastane pri spočítaní plochy, ktorá je vymedzená nejakou krivkou, alebo objem telesa, ktorého strany tvoria zakrivené plochy. Prvý pokus o takýto výpočet uskutočnil **Platónov** študent Eudoxos na akadémii v Aténach. Navrhol metódu zhusťovania intervalu, alebo tiež nazývanú aj **exhaustivnú metódu**. Použitím tejto metódy dokázal, že objem akéhokoľvek kužeľa je rovný objemu 1/3 válca s rovnakou základňou a výškou. Archimedes použil túto jeho metódu na výpočet oblasti vymedzenú parabolou (zobrazená na obrázkoch nižšie) ako aj ďalších plôch a objemov najrôznejších útvarov.

Myšlienka je na počudovanie založená úplne prakticky. Danú krivku aproximujeme pomocou úsečiek. Oblasť vytýčená úsečkami sa skladá z **obdĺžnikov** alebo **lichobežníkov**.



Plochu obdĺžnika vieme jednoducho spočítať. Ako je vidieť na obrázku, čím viac obdĺžnikov vytýčime pod krivkou, tým presnejšie spočítame obsah plochy, pretože výsledná plocha sa bude rovnať **súčtu obsahov** jednotlivých obdĺžnikov. Odtiaľ vznikol názov exhaustivná, tzv. **zhusťovacia metóda** (tiež "metóda vyčerpania").

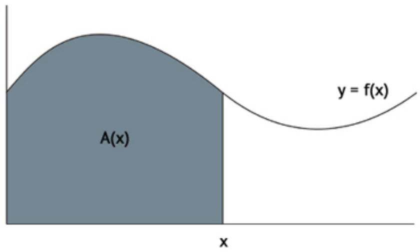


Podobne môžeme spočítať plochu pod parabolou, krivkou, aj pomocou lichobežníkov. Každý z lichobežníkov tvoria dva útvary, útvar obdĺžnika a trojuholníka. A obsah týchto útvarov vieme opäť ľahko spočítať. Ovšem touto metódou bude aproximácia presnejšia, čo je z obrázku zrejmé. Pri použití veľkého počtu obdĺžnikov budú výsledky obidvoch metód takmer rovnaké, ale lichobežníková metóda bude efektívnejšia.

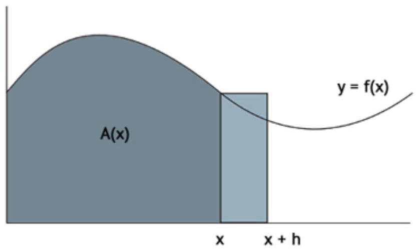
Takže platí, že čím viac obdĺžnikov a lichobežníkov vymedzíme pod krivkou, tým bude výpočet presnejší. Z toho vyplýva, že ak uvažujeme nekonečne veľa obdĺžnikov o nekonečne malej šírke, potom sa obsah týchto obdĺžnikov bude **presne** rovnať oblasti vymedzenej parabolou.

A dostali sme sa k tomu istému problému ako pri diferenciálnom počte, t.j. **stanovenie nekonečného výpočtu**. Presne v tomto sa obdidve metódy zhodujú. Takže jediným problémom, ktorý bol aj pri diferenciálnom počte, je definovať nekonečný počet. Tento počet sa definuje prostredníctvom limity, ktorú v tom čase, ako bolo spomenuté v diferenciálnom počte, rozpracoval Karl Weierstrass, no tentokrát spolu s Augustin-Louis Cauchym, takže pomocou ich metódy teórie limít známou ako Cauchyho-Weierstrassová teória limít sa stal diferenciálny a integrálny počet modernou metódou derivácie a integrácie.

Úlohou bolo nájsť všeobecný predpis, ktorý by zovšeobecnil obsah alebo objem. Presne tak ako diferenciálny počet priraďuje pre každú krivku vzorec jej smernice. A tu práve nastal ten zlom. To zistenie. Takéto zovšeobecnenie nie len, že existuje, ale ono priamo vyplýva z derivácie.



Chceme spočítať plochu $A(x)$ zobrazenú na obrázku vyššie. Krivka vymedzuje nejakú plochu. Presnejšie povedané určuje funkciu plochy. Ľubovoľnému bodu x odpovedá vyfarbená plocha $A(x)$ a krivku, ktorá túto plochu ohraničuje označíme funkciou $f(x)$. Funkciu $f(x)$ poznáme, veľkosť plochy nepoznáme. Napriek tomu, že nepoznáme plochu, ostáva funkciou, a preto ju môžme derivovať. Lenže derivácia $A(x)$ bude krivka ohraničujúca túto plochu, pretože táto plocha je ohraničená touto krivkou. Podstata dôkazu tejto skutočnosti spočíva v skúmaní, ako sa mení veľkosť plochy $A(x)$, keď sa x zväčšuje o malý prírastok h.



Na obrázku vidíme, že novú plochu $A(x+h)$ je možné rozdeliť na dve časti: na pôvodnú plochu $A(x)$ a malú, takmer obdĺžnikovú oblasť, ktorú sme pridali. Šírka druhej oblasti je h. Jej výšku zistíme z grafu, teda bude to $f(x)$. Takže plocha pridanej oblasti je $hf(x)$ (šírka $\times$ výška). Potom obsah celej oblasti je daný aproximáciou:

$$A(x+h) \approx A(x) + hf(x) \tag{12}$$

Čo je možné prepísať na tvar:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x) \tag{13}$$

Táto rovnosť je len približná (čo napokon predstavuje symbol vlnoviek vo výraze), pretože ďalšia oblasť, ktorú musíme pripočítať k $A(x)$, aby sme dostali $A(x+h)$, nie je presne obdlžniková. Ale čím je šírka h menšia, tým presnejšia bude aproximácia.

Keď sa pozrieme na ľavú stranu posledného vzorca a porovnáme ho so vzorcom derivácie z článku diferenciálny počet, uvidíme istú podobnosť. A tak ako tomu bolo pri derivácii, výsledkom nebude približná hodnota, ale rovnosť (podobne ako pri derivácii):

$$A'(x) = f(x) \tag{14}$$

Máme metódu k nájdeniu predpisu pre funkciu plochy $A(x)$. Stačí nám nájsť pre danú krivku $y = f(x)$ funkciu, ktorej derivácia je práve $f(x)$. Máme $f(x) = x^2$. Funkcia $\frac{x^3}{3}$ má deriváciu rovnú x^2, takže funkcia plochy $A(x) = \frac{x^3}{3}$. Takže, ak chceme teraz spočítať obsah plochy vymedzený krivkou $y = x^2$ po bod napr. $x = 5$, stačí do funkčného predpisu plochy dosadiť $x = 5$, čoho výsledkom bude $\frac{5^3}{3} = \frac{125}{3} = 41.666666$.

Pri výpočte plôch a objemov sa musíme naučiť derivovať akoby odzadu. Celý vtip spočíval v nájdení základnej podobnosti medzi deriváciou a integrálom. Táto podobnosť je daná intervalom h, ktorý sa nekonečne zmenšuje. Vymedzením tejto nekonečnej postupnosti dostávame priamu súvislosť medzi deriváciou a integrálom, čo nám umožní počítať obsahy a objemy rôznych útvarov.

Formálne treba spočítať určitý integrál od 0 po 5 z funkcie x^2:

$$\int_0^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \left(\frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{5^3}{3} = \frac{125}{3} = 41.6 \tag{15}$$

Na implementáciu použijeme Simpsonovú metódu. Simpsonov vzorec stačí použiť pre každý oddiel integrovanej oblasti zloženej z troch po sebe idúcich bodov krivky $f(x)$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{3h} \tag{16}$$

Jedinou podmienkou je taká voľba invervalu h, aby boli intervaly zhodné. Ak budeme integrovať od a do b pri rozdelení na $2n$ úsečiek, budeme mať $h = (b - a)/2n$. Nasleduje celý výpis zdrojového kódu Simpsonovej metódy integrácie:

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

double f(double x)
{
    return x*x;
}

double Simpson(double(*f)(double), double a, double b, int N)
{
    double suma = 0;
    double h = (b-a)/(double)N;

    for(int i = 1; i <= N; i++)
    {
```

```
        suma += h*( f(a+(i-1)*h) + 4*f(a-h/2.0+i*h) + f(a+i*h) )/(6.0);
    }

    return suma;
}

int main(void)
{
    printf("Hodnota integralu: %f\n", Simpson(f, 0, 5, 10));

    system("pause");
    return 0;
}
```

Celkový integrál bude potom súčtom čiastkových integrálov, čo je v programovom kóde označené premennou $suma$. Výsledkom tejto premennej bude obsah plochy ohraničenej krivkou $y = x^2$, čo predstavuje hodnotu: `41.666666`.